Leçon 203
Utilisation de la notion de compacité.

I - Espaces métriques compacts

II - Fonctions continues sur un compact

III - Compacité dans les espaces vectoriels normés

Dev 1 : Théorème du point fixe de Kakutani et sous-groupes compacts de $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$

Dev 2 : Diagonalisation des opérateurs symétriques compacts

I - Espaces métriques compacts

1) Propriété de Borel-Lebesgues : def, exemples, compact métrique $\Rightarrow$borné,, prop duale, fermés emboités, parties compactes, union finies et intersections de compacts sont compactes **[Gou08]**
2) Propriété de Bolzano-Weierstrass : def, précompacité, équivalence, exemples, compact $\Leftrightarrow$fermé borné séparable, description des compacts de $\mathbb{R}$, u_n CV ssi unique valeur d'adhérence, compact $\Leftrightarrow$précompact et complet **[Rom23]**

II - Fonctions continues sur un compact

1) L'espace $C(K)$ pour K compact : Heine, app : les fcts continues sont Riemann-intégrables, les images sont compactes, def $\|\cdot\|_\infty$, c'est un Banach, théorème de Dini, continue bijective sur un compact $\Rightarrow$homeo **[HL97]**, **[Rom23]**
2) Théorèmes de point fixe : thm de pt fixe sur un compact, corollaire sur le pt fixe d'une itérée, cas d'un convexe compact, **dev 1** **[Rou15]**
3) Résultats de densité : def espace séparant, réticulé, réticulé + séparant + cstes $\Rightarrow$dense, ex : fcts lip, Stone-Weierstrass, app : thm de Weierstrass **[HL97]**
4) Équicontinuité et théorème d'Ascoli : def equicontinuité, uniforme équicontinuité, équivalence sur un compact, ex, théorème d'Ascoli, app : Cauchy-Arzelà-Peano **[HL97]**

III - Compacité dans les espaces vectoriels normés

1) En dimension finie : compacité boule/sphère $\|\cdot\|_\infty$, équivalence des normes, continuité de toutes les AL, thm de Riesz, dim finie ssi boule compact, description compacts **[Rom23]**, **[Mar+09]**
2) Opérateurs compacts auto-adjoints : def opérateur compact, auto-adjoint, norme auto-adjoint, $\pm\|T\|$ est vp pour T compact auto-adjoint, décomposition orthogonale en sous-espaces propres, **dev 2** **[Mar+09]**/**[HL97]**

Références

[Gou08] Xavier Gourdon. *Les maths en tête : Analyse : Mathématiques pour MP**. Ellipses, 2008.

[HL97] Francis Hirsch et Gilles Lacombe. *Eléments d'analyse fonctionnelle : Cours et exercices*. Masson, 1997.

[Mar+09] Jean-Pierre Marco, Hakim Boumaza, Marie Dellinger et Laurent Lazzarini. *Mathématiques L3, analyse cours complet avec 600 tests et exercices corrigés*. Pearson Education, 2009.

[Rom23] Jean-Etienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités*. De Boeck supérieur, 2023.

[Rou15] François Rouvière. *Petit Guide de Calcul Différentiel : A l'usage de la licence et de l'agrégation*. Cassini, 2015.